



Studi Pustaka: Analisis Komprehensif Persamaan Diferensial dalam Penerapan Teori Ekonomi Dinamis

Yullian Rachmat Yudhi Sentausa¹, Dita Wulan Karisma², Arfatin Nurrahmah³, Sri Murni Soenarno⁴

^{1,2} Fakultas FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, Indonesia

^{3,4} Fakultas Pascasarjana, Universitas Indraprasta PGRI, Jakarta, Indonesia

Article Info

Article history:

Received April 10, 2026

Revised April 12, 2026

Accepted April 15, 2026

Kata Kunci:

Matematika,
Persamaan Diferensial,
Model Matematika Ekonomi,
Teori Ekonomi Dinamis,
Dinamika Makroekonomi

Keywords:

Mathematics,
Differential Equations,
Mathematical of Economics,
Dynamic Economic Theory,
Macroeconomic Dynamics

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menyajikan tinjauan literatur yang mendalam mengenai peranan persamaan diferensial sebagai instrumen utama dalam pemodelan ekonomi dinamis. Melalui pendekatan studi pustaka sistematis, dokumen ini mengeksplorasi transisi dari analisis statis ke dinamis dalam berbagai domain, mulai dari mekanisme mikro penyesuaian harga hingga makroekonomi pertumbuhan jangka panjang dan optimasi antarwaktu. Fokus utama diberikan pada derivasi matematis dari model-model fundamental seperti penyesuaian harga Walrasian, model pertumbuhan Solow-Swan, sistem IS-LM dinamis, dan kontrol optimal Ramsey. Hasil studi menunjukkan bahwa penggunaan persamaan diferensial memungkinkan para ekonom untuk mengidentifikasi kondisi stabilitas ekuilibrium, memprediksi lintasan transisi variabel ekonomi, dan menentukan kebijakan optimal secara temporal. Studi ini menyimpulkan bahwa penguasaan teknik integrasi dan analisis nilai eigen merupakan prasyarat krusial dalam memahami kompleksitas sistem ekonomi modern yang terus berubah.

ABSTRACT

This study aims to present an in-depth literature review of the role of differential equations as a key tool in dynamic economic modeling. Through a systematic literature review approach, the paper explores the transition from statistical to dynamic analysis in various domains, ranging from micro-price adjustment mechanisms to long-run macroeconomic growth and intertemporal optimization. The main focus is on the mathematical derivation of fundamental models such as Walrasian price adjustment, the Solow-Swan growth model, the dynamic IS-LM system, and Ramsey optimal control. The results show that the use of differential equations allows economists to identify equilibrium stability conditions, predict transition trajectories of economic variables, and determine temporally optimal policies. The study concludes that mastery of integration techniques and eigenvalue analysis is a crucial prerequisite for understanding the complexity of modern, ever-changing economic systems.

This is an open access article under the [CC BY](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) license.



Corresponding Author:

Yullian Rachmat Yudhi Sentausa
Fakultas FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia
Bandung, Indonesia
Email: yullian.rachmat18@guru.smp.belajar.id

1. PENDAHULUAN

Ilmu ekonomi telah mengalami evolusi metodologis dari pendekatan deskriptif-kualitatif menuju pendekatan kuantitatif-matematis yang ketat. Salah satu instrumen yang paling berpengaruh dalam transformasi ini adalah persamaan diferensial. Secara substansi, fenomena ekonomi bersifat dinamis; variabel seperti pendapatan nasional, stok modal, harga pasar, dan populasi tidaklah statis melainkan terus berubah terhadap waktu (t) [1].

Analisis ekonomi statis tradisional sering kali hanya mampu menentukan titik di mana kekuatan pasar berada dalam keseimbangan (ekuilibrium). Namun, pendekatan tersebut gagal menjawab dua pertanyaan krusial: (1) Bagaimana proses penyesuaian terjadi jika sistem berada di luar titik ekuilibrium? (2) Apakah ekuilibrium tersebut bersifat stabil secara asimtotik? Persamaan diferensial hadir untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan ini dengan memodelkan laju perubahan variabel tak bebas terhadap variabel bebas utama, yaitu waktu [4].

Studi pustaka ini disusun untuk memberikan gambaran menyeluruh mengenai klasifikasi persamaan diferensial, teknik penyelesaiannya, serta aplikasi teknisnya dalam memecahkan masalah-masalah ekonomi yang kompleks. Dengan mengintegrasikan berbagai sumber literatur terkini, studi ini diharapkan menjadi referensi penting bagi akademisi maupun praktisi dalam memahami dinamika sistem ekonomi melalui lensa matematika [1].

2. METODE

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka sistematis (Systematic Literature Review) dengan pendekatan deskriptif-eksploratif. Tahapan penelitian dilakukan secara terstruktur sebagai berikut:

1. Identifikasi Topik: Menetapkan fokus pada penerapan persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP) dalam konteks mikroekonomi dan makroekonomi.
2. Pencarian Referensi: Mengumpulkan data sekunder dari jurnal ilmiah, buku teks otoritatif serta laporan penelitian yang relevan dalam rentang waktu yang signifikan.
3. Klasifikasi dan Verifikasi: Memilah literatur berdasarkan jenis model (pertumbuhan, harga, atau pasar uang) serta memverifikasi validitas derivasi matematis yang digunakan.
4. Sintesis Data: Mengonstruksi narasi ilmiah dengan menghubungkan konsep matematika murni dengan interpretasi ekonomi yang relevan.

Data yang dianalisis mencakup persamaan diferensial orde satu dan orde dua, baik yang bersifat homogen maupun non-homogen, linear maupun non-linear, serta penerapan prinsip maksimum dalam kontrol optimal [2].

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Landasan Teoritis dan Klasifikasi Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial (PD) didefinisikan sebagai suatu persamaan yang menyatakan hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui (variabel tak bebas) dengan turunan-turunannya terhadap satu atau lebih variabel bebas [2]. Dalam ekonomi, pengklasifikasian PD sangat menentukan metode penyelesaian yang akan diambil.

Tabel 1. Identifikasi Persamaan Diferensiasi dan Relevansi terhadap Ekonomi

Kriteria	Jenis Persamaan	Deskripsi Matematis	Relevansi Ekonomi
Jumlah Variabel Bebas	PD Biasa (PDB)	Hanya satu variabel bebas t	Analisis deret waktu agregat
	PD Parsial (PDP)	Dua atau lebih variabel bebas	Distribusi spasial atau usia
Orde Persamaan	Orde-n	Turunan tertinggi tingkat ke- n	Tingkat kompleksitas dinamika
Linearitas	Linear	Variabel tak bebas & turunannya berpangkat 1	Prinsip superposisi berlaku
	Non-linear	Melibatkan pangkat atau perkalian variabel	Menangkap realitas yang kompleks
Homogenitas	Homogen	Ruas kanan sama dengan nol	Dinamika internal sistem
	Non-homogen	Ruas kanan berupa fungsi $f(t)$	Adanya intervensi/faktor eksogen

Berdasarkan Tabel 1. Penyelesaian PDB melibatkan pencarian fungsi yang memenuhi persamaan tersebut tanpa mengandung turunan [19]. Solusi umum mengandung konstanta sembarang (C) yang mencerminkan keluarga kurva, sedangkan solusi khusus diperoleh jika diberikan Masalah Nilai Awal (MNA) atau *Initial Value Problem* [3].

Tabel 2. Tipologi Persamaan Diferensial dalam Aplikasi Ekonomi

Jenis Persamaan	Contoh Model Ekonomi	Fokus Analisis
Persamaan Diferensial Biasa (ODE)	Pertumbuhan Solow-Swan, Ramsey-Cass-Koopmans	Akumulasi modal dan dinamika pertumbuhan jangka panjang.
Persamaan Diferensial Parsial (PDE)	Model Black-Scholes, Persamaan Panas Finansial	Valuasi derivatif dan distribusi kekayaan kontinu.

Jenis Persamaan	Contoh Model Ekonomi	Fokus Analisis
Persamaan Diferensial Stokastik (SDE)	Model Gerak Brown, Optimasi Utilitas Rekursif	Ketidakpastian pasar, harga aset, dan manajemen risiko.
Persamaan Diferensial Fraksional (FDE)	Pertumbuhan PDB dengan Efek Memori	Ketergantungan sejarah dan dinamika sistem non-lokal.
Neural ODE	Peramalan Kemiskinan, High-Frequency Trading	Integrasi data-driven untuk identifikasi sistem dinamis.

Berdasarkan Tabel 2. bahwa setiap jenis persamaan diferensial memiliki peran spesifik yang saling melengkapi dalam memberikan pemahaman menyeluruh tentang struktur ekonomi. Bagian selanjutnya akan membahas metode penyelesaian dan derivasi matematis yang digunakan untuk menjamin validitas ilmiah dari model-model tersebut [20].

3.2 Dinamika Mikroekonomi: Penyesuaian Harga Pasar

Aplikasi fundamental PD dalam mikroekonomi adalah memodelkan "Hukum Penyesuaian Harga" atau *Walrasian*. Model ini berasumsi bahwa harga bergerak ke atas jika terjadi kelebihan permintaan dan ke bawah jika terjadi kelebihan penawaran [9].

3.2.1 Penyesuaian Harga Orde Satu

Misalkan fungsi permintaan (D) dan penawaran (Q) adalah linear terhadap harga (P):

$$D = a + bP, (b < 0)$$

$$Q = c + dP, (d > 0)$$

Laju perubahan harga terhadap waktu dinyatakan sebagai:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma(D - Q)$$

Substitusi fungsi D dan Q menghasilkan PDB linear orde satu non-homogen:

$$\frac{dP}{dt} + \gamma(d - b)P = \gamma(a - c)$$

Solusi dari persamaan ini adalah:

$$P(t) = (P_0 - P^*)e^{-\gamma(d-b)t} + P^*$$

Di mana P^* adalah harga kesetimbangan $P^* = (a - c)/(d - b)$ [7]. Analisis stabilitas menunjukkan bahwa karena $\gamma, d > 0$ dan $b < 0$, maka koefisien eksponensial negatif, yang berarti $P(t) \rightarrow P^*$ saat $t \rightarrow \infty$. Pasar bersifat stabil secara asimtotik [10].

3.2.2 Model Cobweb Kontinu (Jaring Laba-laba)

Model Cobweb menjelaskan fluktuasi harga pada pasar yang memiliki jeda waktu produksi (seperti sektor pertanian). Dalam versi kontinu, model ini sering menggunakan persamaan diferensial tunda [11]. Stabilitas dalam model Cobweb sangat bergantung pada kemiringan kurva permintaan dan penawaran [13]. Jika kurva penawaran lebih curam daripada permintaan, sistem akan menunjukkan osilasi yang divergen (tidak stabil), sedangkan jika kurva permintaan lebih curam, harga akan konvergen ke titik ekuilibrium melalui spiral ke dalam (*inward spiral*) [12].

3.3 Teori Pertumbuhan Makroekonomi

Persamaan diferensial adalah jantung dari teori pertumbuhan ekonomi, memodelkan bagaimana akumulasi modal fisik mendorong output [6].

3.3.1 Model Pertumbuhan Harrod-Domar

Model Harrod-Domar, yang dikembangkan pada masa Keynesian, menekankan peran tabungan (s) dan rasio modal-output (v). Persamaan dasar pertumbuhan pendapatan nasional (\dot{Y}/Y) adalah:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v} - \delta$$

Di mana δ adalah tingkat penyusutan [5]. Model ini dikenal memiliki masalah "knife-edge" (mata pisau); karena s dan v bersifat eksogen dan kaku, penyimpangan kecil dari lintasan pertumbuhan akan menyebabkan ekonomi jatuh ke dalam resesi atau inflasi yang tidak terkendali tanpa adanya mekanisme koreksi internal [2].

3.3.2 Model Pertumbuhan Neoklasik Solow-Swan

Robert Solow memperbaiki kelemahan Harrod-Domar dengan memperkenalkan fungsi produksi yang memungkinkan substitusi antara modal dan tenaga kerja [15]. Persamaan diferensial fundamental Solow-Swan mengatur perubahan stok modal per pekerja efektif (\dot{k}):

$$\dot{k} = sf(k) - (n + g + \delta)k$$

- $sf(k)$: Investasi bruto per pekerja.
- $(n + g + \delta)k$: Investasi yang dibutuhkan untuk menjaga tingkat modal tetap (akibat pertumbuhan populasi n , kemajuan teknologi g , dan penyusutan δ) [15].

Interpretasi ekonomi dari persamaan ini sangat kuat:

- Steady State: Kondisi di mana $\dot{k} = 0$, menunjukkan ekuilibrium jangka panjang di mana modal per pekerja tidak lagi berubah.

2. Konvergensi: Negara miskin dengan k rendah akan tumbuh lebih cepat daripada negara kaya karena produktivitas marginal modal yang lebih tinggi, sebuah prediksi yang didukung oleh data empiris melalui "Solow Residual"[14].

3.4 Dinamika Makroekonomi Jangka Menengah: IS-LM dan Kurva Phillips

Dalam jangka menengah, interaksi antara pasar barang dan pasar uang dimodelkan melalui sistem persamaan diferensial linear.

3.4.1 Sistem IS-LM Dinamis

Keseimbangan pasar barang (IS) dan pasar uang (LM) sering dinyatakan dalam sistem dua dimensi:

$$\dot{Y} = \alpha$$

$$\dot{i} = \beta$$

Di mana α dan β adalah kecepatan penyesuaian pasar[15]. Analisis stabilitas sistem ini menggunakan matriks Jacobian. Jika nilai eigen memiliki bagian riil negatif, maka ekonomi akan kembali ke keseimbangan setelah terjadi guncangan kebijakan [16].

3.4.2 Dinamika Kurva Phillips

Kurva Phillips menghubungkan tingkat inflasi (π) dengan tingkat pengangguran (u) atau output. Dalam model dinamis, ekspektasi inflasi (π^e) berubah seiring waktu berdasarkan kesalahan prediksi masa lalu:

$$\frac{d\pi^e}{dt} = j(\pi - \pi^e)$$

Integrasi dinamika ekspektasi ke dalam sistem makroekonomi menjelaskan fenomena *overshooting* harga dan siklus bisnis yang didorong oleh guncangan permintaan atau penawaran [15].

3.5 Optimasi Dinamis dan Kontrol Optimal

Ekonomi modern sering menggunakan Teori Kontrol Optimal untuk memecahkan masalah alokasi sumber daya antarwaktu [8].

3.5.1 Model Ramsey dan Hamiltonian

Model Ramsey-Cass-Koopmans menentukan lintasan konsumsi optimal (c) yang memaksimalkan utilitas seumur hidup masyarakat [17]. Masalah ini diselesaikan dengan menyusun fungsi Hamiltonian (H):

$$H = e^{-\rho t} u(c) + \lambda [f(k) - c - (n + \delta)k]$$

Di mana λ adalah variabel *co-state* yang mewakili harga bayangan modal.²⁴ Melalui Prinsip Maksimum Pontryagin, diperoleh "Aturan Keynes-Ramsey":

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} [f'(k) - \rho - \delta]$$

Persamaan ini menyatakan bahwa masyarakat akan meningkatkan konsumsi jika tingkat pengembalian modal ($f'(k)$) lebih tinggi dari tingkat diskonto sosial (ρ) [8].

4. KESIMPULAN

Persamaan diferensial telah membuktikan diri sebagai "bahasa perubahan" dalam ilmu ekonomi. Melalui klasifikasi yang sistematis, ekonomi dapat membedah berbagai fenomena dari skala mikro hingga makro secara presisi. Analisis penyesuaian harga menunjukkan stabilitas pasar dalam jangka pendek, sementara model Solow-Swan memberikan kerangka kerja yang kuat untuk memahami pertumbuhan ekonomi jangka panjang [10].

Transisi ke model optimasi dinamis seperti model Ramsey menunjukkan bahwa perilaku ekonomi bukan sekadar reaksi terhadap kondisi saat ini, tetapi merupakan hasil dari perencanaan strategis antarwaktu [18]. Meskipun model-model ini memiliki keterbatasan dalam menangkap ketidakpastian stokastik yang ekstrem, fondasi deterministik yang dibangun oleh persamaan diferensial tetap menjadi pilar utama dalam analisis kebijakan ekonomi global. Penelitian masa depan disarankan untuk lebih mengintegrasikan persamaan diferensial stokastik untuk menangkap dinamika pasar keuangan yang lebih volatil.

REFERENSI

- [1] Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*.
- [2] Afri, L. D. (2019). *Persamaan Diferensial Elementer*. UIN Sumatera Utara.
- [3] *Mathematical Models in Economics: Applications of Sequences, Derivatives, and Differential Equations*, accessed May 15, 2026,
- [4] Nuryadi. (2018). *Persamaan Diferensial Elementer: Teori dan Aplikasi*. Universitas Pahlawan.
- [5] *Growth Models –Harrod Domar*, accessed May 25, 2026
- [6] Lukač, Z. (2026). *Economic Analysis Through Mathematics*. Springer.
- [7] Aritionang, A. (2021). Aplikasi Persamaan Diferensial Linear Orde Satu dalam Ekonomi. Universitas Kristen Indonesia. M. Achieng and E. Ruhode, "The Adoption and Challenges of Electronic Voting Technologies Within the South African Context," *Int. J. Manag. Inf. Technol.*, vol. 5, no. 4, pp. 1–12, Nov. 2013, doi: 10.5121/ijmit.2013.5401.
- [8] Thohiri, R., et al. (2025). Kajian Literatur Penerapan Persamaan Linear dalam Matematika Ekonomi. *Jurnal Ilmiah Global Education*.
- [9] Fauzan, M., Sugiman, & Sahid. (1993). *Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Ekonomi*. Cakrawala Pendidikan.
- [10] M. Fauzan, Sugiman, and Sahid, "Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Ekonomi," *Cakrawala Pendidikan*, Universitas Negeri Yogyakarta
- [11] *The Solow-Swan Growth Model - Economics*, accessed May 19, 2026
- [12] *Dynamics of the cobweb model with adaptive expectations and nonlinear supply and demand*, accessed May 21, 2026
- [13] Gori, L., et al. (2014). Continuous Time Versions of Cobweb Models with Delays. *Jurnal Matematika Dinamis*.
- [14] *Solow–Swan model - Wikipedia*, accessed April 14, 2026
- [15] *Dynamic IS-LM model with Philips Curve and International Trade - David Publishing*, accessed April 3, 2026
- [16] *Research Article Structural Stability Analysis in a Dynamic IS-LM-AS Macroeconomic Model with Inflation Expectations - Semantic Scholar*, accessed April 14, 2026
- [17] *Optimal Control Theory With Applications In Economics*, accessed April 5, 2026

- [18] The Ramsey-Cass-Koopmans growth model Introduction to dynamic optimization The extended Solow model with human-capital accumulation, accessed April 9, 2026
- [19] Friskila, G. (2021). Modul Aplikasi Persamaan Diferensial Orde Satu. UKI Press.
- [20] Application of Integrals and Differential Equations in Economics - IDEAS/RePE